ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ HỒNG NHUNG

CHỈNH HÓA BÀI TOÁN SIDEWAYS

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số ngành: 9460112

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TP. Hồ Chí Minh, năm 2024

Công trình được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG-HCM.
Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Đặng Đức Trọng

- o Phản biện 1: PGS.TS. Nguyễn Huy Tuấn
- o Phản biện 2: PGS.TS. Nguyễn Minh Quân
- o Phản biện 3: PGS.TS. Nguyễn Thành Nhân
- o Phản biện độc lập 1: TS. Nguyễn Ngọc Trọng
- o Phản biện độc lập 2: TS. Nguyễn Anh Triết

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo tại trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG-HCM vào lúc .... giờ .... phút, ngày ..... tháng ..... năm ......

Có thể tìm hiểu luận án tại

- o Thư viện Tổng hợp Quốc gia Tp.HCM.
- o Thư viện trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG-HCM.
- o Thư viện Trung tâm ĐHQG-HCM.

Mở đầu

Bài toán *sideways* có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong thực tế, đặc biệt trong các lĩnh vực liên quan đến truyền nhiệt, khuếch tán chất lỏng, kiểm tra không phá hủy trong kỹ thuật và công nghiệp hoặc chẩn đoán y học và hình ảnh y tế, ... Trong y học, bài toán *sideways* có thể được áp dụng trong các phương pháp hình ảnh như MRI hoặc CT scan, chúng ta cần xác định cấu trúc hoặc đặc tính bên trong cơ thể từ dữ liệu thu thập bên ngoài. Trong kỹ thuật, việc phát hiện các khuyết tật (vết nứt, lỗ hỏng,...) bên trong mà không cần phá hủy sản phẩm là rất quan trọng. Bài toán *sideways* có thể được sử dụng để xác định các đặc tính bên trong của vật liệu từ dữ liệu đo tại các điểm nhất định để phát hiện khuyết tật mà không cần làm hư hại cấu trúc. Một vấn đề khác cũng được quan tâm nhiều trong các ngành công nghiệp, như sản xuất thép, luyện kim, hoặc hàng không, nhiệt độ bề mặt của các vật liệu cần được xác định chính xác. Tuy nhiên, trong các môi trường khắc nghiệt với nhiệt độ quá cáo, quá thấp, hoặc dao động quá nhiều, việc tiếp cận bề mặt để đo trực tiếp là rất khó khăn hoặc không thể thực hiện được. Bài toán *sideways* cho phép khôi phục nhiệt độ bề mặt từ các dữ liệu đo được tại các điểm bên trong vật liệu. Với sự phổ biến và tầm quan trọng của bài toán *sideways* trong thời gian gần đây nên chúng tôi sẽ xem xét bài toán này.

Dữ liệu thu được từ quá trình đo đạc được lưu trữ dưới dạng rời rạc hóa của hàm số $f(x)$ tại các điểm đo bên trong $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tuy nhiên, các dữ liệu này luôn ở trạng thái bị nhiễu bởi nhiều yếu tố, từ yếu tố khách quan (chẳng hạn như: mưa, gió, các tác động của môi trường) đến yếu tố chủ quan (chẳng hạn như: con người, máy móc, . . .). Bài toán khôi phục nhiệt độ trên bề mặt của vật thể từ các điểm đo bên trong đã rất phổ biến với nhiều loại điểm đo. Đối với trường hợp một chiều, vật thể được mô hình hóa như một đoạn thẳng $[0, L]$. Nhiều phương pháp nghiên cứu đã được đề xuất để khôi phục nhiệt đồ từ các dữ liệu đo tại một hoặc nhiều điểm đo bên trong. Chẳng hạn như, nhiệt độ được khôi phục từ dữ liệu nhiệt độ $u(x_0, t)$ và thông lượng bên trong $u_x(x_0, t)$. Tuy nhiên, trong thực tế rất khó để đo chính xác thông lượng nhiệt bên trong. Do đó, một cách khả thi hơn là tìm hàm nhiệt độ $u(x,t)$ từ dữ liệu đo tại nhiều điểm đo bên trong $x_1, \ldots, x_k$. Một phương pháp nghiên cứu khác, các tác giả đã sử dụng dữ liệu nhiệt độ tại một điểm đo bên trong $u(x_0,t)$ và giả thiết $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$ để khôi phục nhiệt độ $u(x,t)$. Tuy nhiên, giả thiết nhiệt độ tiến tới 0 ở vô cực chỉ là một giả thiết hợp lý và không áp dụng được trong các mô hình thực tế vì vật thể có kích thước hữu hạn. Do đó, chúng ta thay thế giả thiết ở vô cực bằng điều kiện bên trong để xác định sự phân bố nhiệt độ.

Trong trường hợp hai chiều, một số nghiên cứu đã khảo sát bài toán sideways với nhiều loại dữ liệu đo khác nhau. Chẳng hạn như, khôi phục nhiệt độ bề mặt từ vật thể $\Omega = (0,1) \times (0,\infty)$ với bề mặt không thể tiếp cận là $\{x = 1\}$ và dữ liệu đo bên trong là $u(0,y,t) = \phi(y,t)$, $u_x(0,y,t) = 0$. Một nghiên cứu khác, các tác giả đã xem xét $\Omega = \mathbb{R} \times (0,2)$ và khôi phục nhiệt độ $u(x,y,t)$ từ các dữ liệu đo $u(x,1,t)$, $u(x,2,t)$.

Bài toán không chỉnh với dữ liệu ngẫu nhiên đã thu hút được nhiều sự quan tâm trong thời gian gần đây. Ví dụ như các nghiên cứu về các bài toán ngược với dữ liệu ngẫu nhiên, bài toán nguồn với dữ liệu ngẫu nhiên, hoặc bài toán Cauchy của phương trình eliptic với dữ liệu ngẫu nhiên. Các nghiên cứu đó chủ yếu xem xét dữ liệu trên miền bị chặn hoặc hình chữ nhật.

Trong luận án này sẽ tập trung nghiên cứu phương pháp chỉnh hóa cho bài toán sideways với dữ liệu tất định và dữ liệu ngẫu nhiên trên miền một chiều và hai chiều.

Bài toán 1. Xét bài toán sideways với dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên và nhiễu tất định trên miền một chiều.

Trong những năm gần đây, phép tính vi phân phân thứ đã đạt được nhiều thành công trong nhiều lĩnh vực khoa học như toán học, vật lý , hóa học, hệ thống sinh học, v.v. Các đạo hàm phân thứ khá linh hoạt trong việc mô tả dòng chảy nhớt, đàn hồi và khuếch tán dị thường, siêu khuếch tán với mô hình có thể không phù hợp với mô hình chuyển động Brown cổ điển. Ở đây, chúng tôi sẽ xem xét phương trình khuếch tán

$$D_t^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega. \tag{1}$$

Trong đó, D_t^α là đạo hàm Caputo cấp α theo biến t, $0 < \alpha \le 1$ và miền $\Omega = (0,L) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$ với $L > 0$. Chúng tôi xem xét bài toán (1) với điều kiện đầu

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{với mọi } x \in (0, L). \tag{2}$$

Giả sử rằng $L > 2$ và các điểm bên trong $x = 1$ và $x = 2$, ta đặt

$$u(1,t) := h(t), \qquad \text{và } u(2,t) := g(t). \tag{3}$$

Nhiệt độ tại các điểm đo bên trong bị ảnh hưởng bởi nhiễu. Trong bài toán này, chúng tôi xem xét hai trường hợp: dữ liệu có nhiễu tất định hoặc nhiễu ngẫu nhiên. Trong trường hợp nhiễu tất định, chúng tôi thu được hai dữ liệu đo g_δ, h_δ thoả

$$||g - g_\delta||_{L^2(0,\infty)} \le \delta, \ ||h - h_\delta||_{L^2(0,\infty)} \le \delta, \tag{4}$$

trong đó, $\delta > 0$ là mức độ nhiễu. Từ dữ liệu g_δ, h_δ, chúng ta phải tìm hàm $u(x,t)$. Với mỗi $x \notin [1,2]$, bài toán không chỉnh, do đó, chúng ta cần có sự chỉnh hóa. Trong [1, 2], dựa trên kết quả tổng quát trong [2], chỉnh hóa tối ưu đã được nghiên cứu trong các bài toán *sideways* có điểm đo bên trong. Nhưng các điều kiện để đạt được sự tối ưu sử dụng tính lồi của một số hàm cụ thể và rất chặt chẽ. Công thức nghiệm của chúng tôi khó thỏa mãn điều kiện lồi đó và một kết quả tối ưu cho kết quả chỉnh hóa hậu nghiệm của bài toán vẫn chưa được nghiên cứu trước đó.

Bài toán 2. Bài toán sideways trên miền hai chiều với dữ liệu ngẫu nhiên rời rạc.

Vật thể được mô hình bởi $\mathbb{R} \times (0,2)$ với đường $\mathbb{R} \times \{y = 0\}$ thể hiện bề mặt không thể tiếp xúc của vật thể. Nhiệt độ được đo tại hai đường $\mathbb{R} \times \{y = 1\}$ và $\mathbb{R} \times \{y = 2\}$. Chúng ta xem xét bài toán xác định nhiệt độ

$$v(x,t) = u\left(x, y_0, t\right), \quad 0 \le y_0 < 1, \tag{5}$$

trong đó u thoả

$$\kappa \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \kappa > 0. \tag{6}$$

Trong thực tế, một vài kết quả liên quan đến dữ liệu tất định đã được nghiên cứu kỹ lưỡng gần đây. Trong [3], các tác giả đã nghiên cứu bài toán với dữ liệu tất định. Để nghiệm duy nhất, chúng ta sẽ phải đo nhiệt độ của vật thể tại hai đường bên trong $\mathbb{R} \times \{y = 1\}$ và $\mathbb{R} \times \{y = 2\}$, điều này cho phép chúng ta xác định tính duy nhất của nhiệt độ bên trong (xem [4]). Hơn nữa, bài toán *không chỉnh* nếu chúng ta xem xét bài toán trên toàn bộ khoảng thời gian $\mathbb{R}_+$ ứng với chuẩn L^2. Đặc biệt, các tác giả chỉnh hoá hàm $u\left(x,0,t\right)$ trực tiếp từ dữ liệu đo của $u\left(x,1,t\right)$ và $u\left(x,2,t\right)$. Chúng tôi phát triển ý tưởng của bài báo [3] và tập trung vào bài toán khôi phục sự phân bố nhiệt từ dữ liệu đo có nhiễu ngẫu nhiên. Bài toán với loại dữ liệu này vẫn chưa được nghiên cứu trước đây. Hơn nữa, chúng tôi cũng quan tâm đến dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên có tính mới so với các nghiên cứu trước đó. Nếu chúng tôi đo được hàm $f(x,t)$ và $g(x,t)$ tại các điểm rời rạc $\{x_m\}$ và các thời điểm rời rạc $\{t_j\}$, thì chúng tôi có được một tập các giá trị đo $\{(\tau_{j,m},\eta_{j,m}) : -M \le m \le M, 1 \le j \le n\}$, trong đó $\tau_{j,m} \approx f\left(mh,t_j\right)$ và $\eta_{j,m} \approx g\left(mh,t_j\right)$ theo mô hình sau

$$\tau_{j,m} = f\left(mh,t_j\right) + \epsilon_{j,m}, \tag{7}$$

$$\eta_{j,m} = g\left(mh,t_j\right) + \varepsilon_{j,m}. \tag{8}$$

Các sai số $\epsilon_{j,m}, \varepsilon_{j,m}$ chưa biết và thường được giả sử là độc lập với nhau. Chúng tôi chỉ kiểm tra *mô hình phương sai bị chặn*, tức là có $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ thỏa $\mathbb{V}ar(\epsilon_{j,m}) \le \sigma_1^2, \mathbb{V}ar(\varepsilon_{j,m}) \le \sigma_2^2$. Bài toán tìm sự phân bố nhiệt $u = u(x,y,t)$ thoả điều kiện đầu và các điều kiện bên trong từ dữ liệu rời rạc như (7), (8).

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong ba chương theo bố cục như sau: Chương 1 - Kiến thức chuẩn bị; Chương 2 - Bài toán sideways một chiều với dữ liệu ngẫu nhiên và dữ liệu tất đinh; Chương 3 - Bài toán sideways trên miền hai chiều với dữ liệu ngẫu nhiên rời rạc.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này nhắc lại một số kiến thức nền tảng cho việc nghiên cứu các nội dung trong các chương sau. Một số kiến thức về Giải tích, đơn cử như các lớp hàm thông dụng, toán tử, biến đổi Fourier và một số bất đẳng thức. Bên cạnh đó, khái niệm về *bài toán ngược, bài toán không chỉnh* cũng được trình bày trong chương này. Cuối chương sẽ trình bày các loại sai số của ước lượng trong thống kê.

Chương 2

Bài toán sideways một chiều với dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên và dữ liệu tất định

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày các kết quả của bài toán 1, là kết quả của bài báo [P1].

2.1 Giới thiệu bài toán

Bài toán được quan tâm trong chương này được phát biểu như sau

$$D_t^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{2.1}$$

trong đó $0 < \alpha \leq 1$ và $\Omega = (0, L) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$ với $L > 0$. Chúng tôi xem xét bài toán (2.1) thoả điều kiện đầu:

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{với mọi } x \in (0, L), \tag{2.2}$$

và điều kiện nhiệt độ tại các điểm bên trong $x = 1$ và $x = 2$

$$u(1,t) := h(t), \qquad \text{và } u(2,t) := g(t). \tag{2.3}$$

Như đã trình bày ở trên, nhiệt độ tại các điểm đo bên trong bị ảnh hưởng bởi nhiễu. Vì vậy, chúng tôi xem xét bài toán với dữ liệu có nhiễu tất định hoặc nhiễu ngẫu nhiên.

2.2 Bài toán không chỉnh

Áp dụng biến đổi Fourier vào phương trình (2.1), (2.2) và (2.3), ta tìm được công thức nghiệm Fourier của bài toán là

$$u^{ft}(x,\omega) = g^{ft}(\omega)H(x-1,\omega) + h^{ft}(\omega)H(2-x,\omega), \tag{2.4}$$

trong đó

$$H(x,\omega) = \frac{\sinh(x(i\omega)^{\alpha/2})}{\sinh((i\omega)^{\alpha/2})}, \quad \omega, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Để chứng minh bài toán không chỉnh, chúng ta cần có một số đánh giá cho hàm $H(y,\omega)$, các đánh giá này được trình bày trong bổ đề sau

Bổ đề 2.2.1. *Cho $\omega, y \in \mathbb{R}, y \neq 0, |\omega| \neq 0$, chúng ta có*

$$|e^{y(i\omega)^{\alpha/2})}| = e^{y.|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)}.$$

Hơn nữa, chúng ta có thể tìm được các hằng số $c_*, c^* > 0$ độc lập với y,ω sao cho

$$\begin{aligned}
c_* e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} &\le |H(y,\omega)| \le c^* e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} && \textit{khi } |y|>1, |\omega|>1,\\
c_* e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} &\le |H(y,\omega)| \le c^* |y| e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} && \textit{khi } |y|>1, |\omega|\le 1,\\
c_* |y| e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} &\le |H(y,\omega)| \le c^* |y| e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} && \textit{khi } |y|\le 1, |\omega|\le 1,\\
c_* |y| e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} &\le |H(y,\omega)| \le c^* e^{(|y|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} && \textit{khi } |y|\le 1, |\omega|> 1.
\end{aligned}$$

2.2.1 Tính không chỉnh của bài toán

Trong trường hợp $1 < x < 2$, áp dụng Bổ đề 2.2.1, chúng ta có hằng số $C > 0$ sao cho

$$|u^{ft}(x,\omega)| \le C(|g^{ft}(\omega)|e^{(x-2)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} + |h^{ft}(\omega)|e^{(1-x)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)}).$$

Ta có $e^{(x-2)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)}$, $e^{(1-x)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)}$ bị chặn khi $1 < x < 2$, do đó, bài toán là chỉnh trong trường hợp này.

Khi $x \notin [1,2]$, chúng ta xem xét trường hợp $g(t) = h(t) \equiv 0$, $u(x,t) \equiv 0$, $g_n^{ft}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{n\pi(1+\omega^2)}}\mathbb{I}_{n<|\omega|<n+1}(\omega)$, $h_n^{ft}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{n\pi(1+\omega^2)}}\mathbb{I}_{n<|\omega|<n+1}(\omega)$ và $u_n^{ft}(\omega) = g_n^{ft}(\omega)H(x-1,\omega) + h_n^{ft}(\omega)H(2-x,\omega)$. Sử dụng bất đẳng thức Parseval, và Bổ đề 2.2.1, chúng ta có được

$$\|u^{ft}(x,.) - u_n^{ft}(x,.)\|^2 \ge \frac{C}{(1+(n+1)^2)} e^{(x-2)n^{\alpha/2}\cos\alpha\pi/4} \to \infty, \quad x > 2.$$

Do vậy, bài toán không chỉnh khi $x > 2$. Chúng ta có kết quả tương tự cho trường hợp $0 \le x < 1$.

2.3 Chỉnh hoá hậu nghiệm của bài toán với dữ liệu tất định

Trong trường hợp nhiễu tất định, chúng tôi thu được hai dữ liệu đo g_δ, h_δ thoả

$$||g - g_\delta||_{L^2(0,\infty)} \le \delta, \ ||h - h_\delta||_{L^2(0,\infty)} \le \delta, \tag{2.6}$$

trong đó $\delta > 0$ là mức độ nhiễu. Từ dữ liệu g_δ, h_δ, chúng ta phải tìm hàm $u(x,t)$. Chúng ta giả sử rằng hàm $u(x,t)$, $x \in [0,L], t \ge 0$ là nghiệm của hệ phương trình (2.1), (2.2), (2.3) và tồn tại hằng số $E > 0$ thoả $||u(0,.)||, ||u(L,.)|| \le E$.

2.3.1 Phương pháp chặt cụt cho trường hợp $0 \le x < 1$

Nghiệm Fourier của bài toán có thể viết lại như sau

$$u^{ft}(x,\omega) = (h^{ft}(\omega) + g^{ft}(\omega)H^{-1}(2-x,\omega)H(x-1,\omega))H(2-x,\omega). \tag{2.7}$$

Ta đặt

$$\widetilde{h}(t) = h(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g^{ft}(\omega)H^{-1}(2-x,\omega)H(x-1,\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{2.8}$$

suy ra

$$\widetilde{h}^{ft}(t) = h^{ft}(t) + g^{ft}(\omega)H^{-1}(2-x,\omega)H(x-1,\omega).$$

Chúng ta xem xét bài toán chỉnh hoá hàm u sao cho

$$u^{ft}(x,\omega) = \widetilde{h}^{ft}(\omega)H(2-x,\omega). \tag{2.9}$$

Từ (2.8), chúng ta có dữ liệu nhiễu tương ứng

$$\widetilde{h}_\delta(t) = h_\delta(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g_\delta^{ft}(\omega)H^{-1}(2-x,\omega)H(x-1,\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Từ giả thiết (2.6), chúng ta có thể xem xét bài toán (2.7) với giả thiết

$$||\widetilde{h} - \widetilde{h}_\delta|| \ \le \ \delta + \delta\sup_{\omega}|H^{-1}(2-x,\omega)H(x-1,\omega)| := \widetilde{\delta}.$$

Mặt khác, từ (2.9) chúng ta có $u^{ft}(0,\omega) = \widetilde{h}^{ft}(\omega)H(2,\omega)$. Do đó, sử dụng Bổ đề 2.2.1 và giả thiết $||u^{ft}(0,.)|| \le E$, chúng ta suy ra được

$$\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{h}^{ft}(\omega)|^2 e^{2|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)}d\omega \le (c^*E)^2. \tag{2.10}$$

Chúng ta đặt

$$Aw(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} w^{ft}(\omega)H^{-1}(2-x,\omega)e^{it\omega}d\omega. \tag{2.11}$$

Cho $\eta > 0,\ 0 \leq x < 1$, và $R_\eta(x) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ là một toán tử tuyến tính chỉnh hoá được xác định bởi

$$R_\eta(x)w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta}^{\eta} H(2-x,\omega) w^{ft}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Cho $\tau > 1$, chúng ta tìm tham số $\eta_\delta > 0$ sao cho $||AR_{\eta_\delta}\widetilde{h}_\delta - \widetilde{h}_\delta|| = \tau\widetilde{\delta}$, nghĩa là

$$\int_{|\omega| \geq \eta_\delta} |\widetilde{h}_\delta^{ft}(\omega)|^2 d\omega = \tau^2 \widetilde{\delta}^2. \tag{2.12}$$

Chúng ta có được kết quả hội tụ của chỉnh hoá $R_{\eta_\delta}(x)$ được trình bày trong định lý sau:

Định lý 2.3.1. *Cho hàm số $u(x,t)$ thoả (2.9), $E > 0$ và $||u(0,.)|| \leq E$. Cho $x = 0$, chúng ta có $\lim_{\delta \to 0^+} ||R_{\eta_\delta}(0)\widetilde{h}_\delta - u(0,.)|| = 0$. Cho $0 < x < 1$, tồn tại một hằng số $C > 0$ độc lập với δ sao cho*

$$||R_{\eta_\delta}(x)\widetilde{h}_\delta - u(x,.)|| \leq C\delta^x.$$

Hơn nữa, phương pháp chỉnh hoá $R_{\eta_\delta}(x)$, $0 < x < 1$, có bậc tối ưu, nghĩa là, tồn tại một hằng số $c^+ > 0$ sao cho

$$\Delta(\delta, R_{\eta_\delta}(x), A, M_{A,E}) \leq c^+ \inf_R \Delta(\delta, R, A, M_{A,E}).$$

Ở đây A được định nghĩa như trong phương trình (2.11) và $M_{A,E} = \{w \in L^2(\mathbb{R}) : ||A^{-1}w|| \leq E\}$.

2.3.2 Phương pháp chặt cụt cho trường hợp $2 < x \leq L$

Tương tự như trường hợp $2 < x \leq L$, chúng ta có được kết quả hội tụ của ước lượng của phương pháp chặt cụt.

Định lý 2.3.2. *Cho hàm số $u(x,t)$ thoả (2.9), $E > 0$ và $||u(L,.)|| \leq E$. Khi $x = L$ chúng ta có $||\mathcal{R}_{\eta_\delta}(L)\widetilde{g}_\delta - u(L,.)|| \to 0$ khi $\delta \to 0^+$.*

Khi $2 < x < L$, tồn tại một hằng số $C > 0$ độc lập với δ sao cho

$$||\mathcal{R}_{\eta_\delta}(x)\widetilde{g}_\delta - u(x,.)|| \leq C\delta^{\frac{L-x}{L-2}}.$$

Hơn nữa, phương pháp chỉnh hoá $R_{\eta_\delta}(x)$ có bậc tối ưu khi $2 < x < L$, nghĩa là, tồn tại một hằng số $c^+ > 0$ sao cho

$$\Delta(\delta, \mathcal{R}_{\eta_\delta}(x), \mathcal{A}, M_{\mathcal{A},E}) \leq c^+ \inf_R \Delta(\delta, R, \mathcal{A}, M_{\mathcal{A},E}).$$

2.4 Ước lượng cho bài toán sideways với dữ liệu ngẫu nhiên rời rạc

2.4.1 Ước lượng chiếu cho bài toán hồi quy

Trong phần này, chúng tã sẽ nhắc lại khái niệm ước chiếu cho bài toán mô hình.

2.4.2 Phương pháp chung để khôi phục nhiệt độ từ dữ liệu ngẫu nhiên rời rạc

Trong trường hợp nhiễu ngẫu nhiên, chúng tôi giả sử rằng dữ liệu ν_{0k}, η_{0k} được đo tại các thời điểm rời rạc $t = t_k = \frac{Tk}{n}$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ và được xác định từ mô hình hồi quy

$$\nu_{0k} = h(t_k) + \epsilon_k, \quad \eta_{0k} = g(t_k) + \epsilon'_k, \tag{2.13}$$

Các sai số ϵ_k, ϵ'_k, $k = \overline{1, n}$, là các biến ngẫu nhiên độc lập và $\mathbb{E}\epsilon_k = \mathbb{E}\epsilon'_k = 0$ và $\mathrm{Var}(\epsilon_k), \mathrm{Var}(\epsilon'_k) \le \sigma_\varepsilon^2$, ở đây $\sigma_\varepsilon > 0$ và được cố định.

Bây giờ, chúng tôi xây dựng một xấp xỉ cho $h \in H^p(\mathbb{R})$. Chúng tôi chọn hàm $\tau_T \in C^1(\mathbb{R})$ với $T >$ sao cho

$$\tau_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \in [0, T-1], \\ 0 & \text{khi } t \in [T, \infty), \end{cases}$$

và $\sup_{T \in [1,\infty)} \sup_{t \ge 0} (|\tau_T(t)| + |\tau'_T(t)|) < \infty$.

Từ mô hình hồi quy (2.13), chọn $\phi = \tau_T h$, $\varepsilon_k = \tau_T(t_k)\epsilon_k$, thì

$$\nu_k = \tau_T(t_k)\nu_{0k} = \tau_T(t_k)h(t_k) + \tau_T(t_k)\epsilon_k := \tau_T(t_k)h(t_k) + \varepsilon_k.$$

Từ $\{\nu_k\}$ chúng ta có thể xây dựng $\widehat{\theta}_j$ và $\widehat{\phi}_n$. Sai số trung bình bình phương tích phân (MISE) của ước lượng chiếu $\widehat{\phi}_n$ được định nghĩa như sau

$$\mathrm{MISE}(\widehat{\phi}_n) := \mathbb{E}\|\widehat{\phi}_n - h\|^2 \le 2\mathbb{E}\|\widehat{\phi}_n - \phi\|^2 + 2\|(1-\tau_T)h\|^2.$$

Các kết quả đánh giá cho sai số trung bình bình phương tích phân của $\widehat{\phi}_n$ được trình bày trong Bổ đề 2.4.1.

Bổ đề 2.4.1. *Chúng ta có những kết quả sau*

(i) Cho $Q > 0, p > 0, \beta > 1/2$. Giả sử $h \in \mathcal{S}^p$, $h(0) = 0$, $\phi := \tau_T h \in$

$H^\beta(T,Q)$. Thì tồn tại một hằng số C độc lập với n, β, T sao cho
$$\mathrm{MISE}(\widehat{\phi}_n) \le CN_n\left(\frac{T^2\sigma_\varepsilon^2}{n} + \frac{Qn^{1-2\beta}}{2\beta-1}\right) + \frac{Q}{N_n^{2\beta}} + \frac{C}{T^{2p}}.$$

(ii) *Nếu $h \in H_0^1(0,\infty) \cap \mathcal{S}^p$ thì $\phi = \tau_T h \in H^1(T,Q)$,trong đó $Q = 2\left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \|\phi'\|^2_{L^2(0,\infty)}$, và $H_0^1(0,+\infty) = \{f \in H^1(0,+\infty) : f(0) = 0\}$. Khi đó, tồn tại một hằng số C độc lập với n, T, $E(N,T) = \frac{NT^2}{n} + \frac{T^2}{N^2} + \frac{1}{T^{2p}}$. thì*
$$\mathrm{MISE}(\widehat{\phi}_n) \le CE(N_n, T).$$

(iii) *Giả sử các giả thiết (ii) đúng. Nếu $(N^*, T^*) = \operatorname{argmin} E(N,T)$ thì tồn tại một hằng số $C_1 > 0$ sao cho $N^* = \sqrt[3]{2}n^{1/3}$, $T^* = C_1 n^{\frac{1}{3(p+1)}}$. Trong trường hợp này, tồn tại hằng số C độc lập với n sao cho*
$$\mathrm{MISE}(\widehat{\phi}_n) \le Cn^{-\frac{2p}{3(p+1)}}.$$

2.4.3 Ước lượng: tính vững và tốc độ hội tụ

Cho ν_{0k}, η_{0k} được định nghĩa trong (2.13), chúng ta sẽ sử dụng dữ liệu
$$\nu_k = \tau_T(t_k)\nu_{0k},\ \eta_k = \tau_T(t_k)\eta_{0k}. \tag{2.14}$$
Đâu tiên, chúng ta định nghĩa một ước lượng $\hat{u}(x,t)$.

Định nghĩa 2.4.2. Chúng ta định nghĩa
$$\widehat{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}^{ft}(x,\omega)\mathbb{I}_{[-M_n,M_n]}(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$
trong đó $\widehat{u}^{ft}(x,\omega) = \widehat{g}^{ft}(\omega)H(x-1,\omega) - \widehat{h}^{ft}(\omega)H(x-2,\omega)$ và
$$\widehat{g}^{ft}(\omega) = \sum_{j=1}^{N_n}\frac{T}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\eta_k\varphi_j(t_k)\Phi_j(\omega)\right), \widehat{h}^{ft}(\omega) = \sum_{j=1}^{N_n}\frac{T}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k\varphi_j(t_k)\Phi_j(\omega)\right).$$
$$\widehat{g}^{ft}(\omega) = \sum_{j=1}^{N_n}\frac{T}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\eta_k\varphi_j(t_k)\Phi_j(\omega)\right),$$
$$\widehat{h}^{ft}(\omega) = \sum_{j=1}^{N_n}\frac{T}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k\varphi_j(t_k)\Phi_j(\omega)\right).$$

Cuối cùng, chúng ta có các kết quả đánh giá cho sai số trung bình bình phương tích phân của ước lượng $\hat{u}(x,t)$.

Định lý 2.4.3.

(i) *Cho* $p, s, \beta, T > 0$ *và* $Q = Q(\beta, T) > 0$. *Giả sử* $h, g \in \mathcal{S}^p \cap H^s(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, $g(0) = 0$, *sao cho* $\tau_T h, \tau_T g \in H^\beta(T, Q) \forall T > 0$. *Với* $\kappa(x, M) = \max_{|\omega| \le M} \max\{e^{(|x-1|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)}, e^{(|x-2|-1)|\omega|^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)}\}$, *thì*

$$\mathrm{MISE}\Big(\widehat{u}(x,.)\Big) \le C\kappa^2(x, M_n)\left[N_n\left(\frac{T^2\sigma_\varepsilon^2}{n} + \frac{Qn^{1-2\beta}}{2\beta - 1}\right) + \frac{Q}{N_n^{2\beta}} + \frac{1}{T^{2p}}\right] + \frac{\|u^{ft}(x,.)\|_s^2}{(1+M_n^2)^s}.$$

(ii) *Nếu* $h, g \in \mathcal{S}^p \cap H_0^1(0, \infty)$ *thì* h, g *thoả các giả thiết của phần (i) với* $s = \beta = 1$, $Q = \left(\frac{T}{\pi}\right)^2(\|h\|_{H^1}^2 + \|g\|_{H^1}^2) < \infty$, $T = n^{\frac{1}{3(p+1)}}$, $N = n^{1/3}$ *và chúng ta có được*

$$\mathrm{MISE}\Big(\widehat{u}(x,.)\Big) \le C\kappa^2(x, M_n) n^{-\frac{2p}{3(p+1)}} + \frac{\|u^{ft}(x,.)\|_{H^1}^2}{1+M_n^2}.$$

Khi $x > 2$, *tồn tại một hằng số* $C > 0$ *sao cho*

$$\mathrm{MISE}\Big(\widehat{u}(x,.)\Big) \le CE_0(M_n),$$

trong đó

$$E_0(M) = e^{2(x-2)M^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} n^{-\frac{2p}{3(p+1)}} + \frac{1}{1+M^2}.$$

Khi $0 < x < 1$, *tồn tại một hằng số* $C > 0$ *sao cho*

$$\mathrm{MISE}\Big(\widehat{u}(x,.)\Big) \le CE_1(M_n),$$

trong đó

$$E_1(M) = e^{2(1-x)M^{\alpha/2}\cos(\alpha\pi/4)} n^{-\frac{2p}{3(p+1)}} + \frac{1}{1+M^2}.$$

(iii) *Giả sử các giả thiết của phần (ii) thoả. Khi* $x > 2$, *ký hiệu* $M_* = \mathrm{argmin} E_0(M)$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_*}{\ln^{2/\alpha} n} = \left(\frac{p}{3(p+1)(x-2)\cos(\alpha\pi/4)}\right)^{\frac{2}{\alpha}},$$

và

$$\mathrm{MISE}\Big(\widehat{u}(x,.)\Big) \le C \ln^{4/\alpha} n.$$

Khi $0 < x < 1$, *ký hiệu* $M_1^* = \text{argmin} E_1(M)$ *thì*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_1^*}{\ln^{2/\alpha} n} = \left(\frac{p}{3(p+1)(1-x)\cos(\alpha\pi/4)} \right)^{\frac{2}{\alpha}},$$
và
$$\text{MISE}\left(\widehat{u}(x,.) \right) \leq C \ln^{4/\alpha} n.$$

2.5 Các kết quả số

2.5.1 Đánh giá bằng giải số của biến đổi Fourier liên tục

Trong phần này chúng tôi trình bày một số thử nghiệm số thu được bằng phương pháp chỉnh hóa. Độ chính xác và hiệu quả của thuật toán có thể được minh họa trong trường hợp dữ liệu bị nhiễu.

2.5.2 Một ví dụ cho bài toán sideways

Đầu tiên, chúng tôi sẽ trình bày mô phỏng dữ liệu $u(1,t)$ và $u(2,t)$ với $t > 0$. Sử dụng dữ liệu mô phỏng, chúng ta xem xét mô hình
$$D_t^{0.2} u(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in (0,5) \times (0,+\infty)$$
và mô hình hồi quy
$$\nu_{0i} = u(1,t_i) + X_i; \quad \eta_{0i} = u(2,t_i) + Y_i, i = \overline{1,m}.$$
Chúng ta sẽ kiểm tra tính hiệu quả của thuật toán trong lý thuyết với các cỡ mẫu khác nhau

Chương 3

Bài toán sideways trên miền hai chiều với dữ liệu ngẫu nhiên rời rạc

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày các kết quả của bài toán 2. Đầu tiên, chúng tôi tìm công thức biểu diễn nghiệm Fourier của bài toán và chứng minh được bài toán không chỉnh. Sau đó, chúng tôi trình bày một kết quả có thể được áp dụng để định nghĩa các tham số tính toán. Tiếp theo, chúng tôi nêu các xấp xỉ của các hàm $f(x,t), g(x,t)$. Sau đó, chúng tôi đề xuất một bộ ước lượng cho $u(x, y_0, t)$. Chúng tôi cũng đưa ra một cách cụ thể để định nghĩa các tham số chỉnh hóa.

3.1 Giới thiệu

Trước hết, chúng tôi phát biểu lại bài toán trên miền hai chiều như sau: Vật thể được mô hình bởi $\mathbb{R} \times (0,2)$, đường $\mathbb{R} \times \{y = 0\}$ thể hiện bề mặt không thể tiếp xúc của vật thể. Nhiệt độ được đo tại hai đường $\mathbb{R} \times \{y = 1\}$ và $\mathbb{R} \times \{y = 2\}$. Chúng tôi xem xét bài toán xác định nhiệt độ

$$v(x,t) = u\left(x, y_0, t\right), \quad 0 \le y_0 < 1, \tag{3.1}$$

trong đó u thoả

$$\kappa \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{3.2}$$

hằng số κ dương. Hàm $u(x,y,t)$ thoả các điều kiện bên trong

$$u\,(x,2,t) = g(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.3}$$

$$u\,(x,1,t) = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.4}$$

và điều kiện đầu

$$u(x,y,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < y < 2. \tag{3.5}$$

Hàm số $f(x,t)$ và $g(x,t)$ được đo tại các điểm rời rạc $\{x_m = mh\}$, $h > 0, -M \le m \le M$ và các thời điểm rời rạc $0 < t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le T$, thì chúng tôi có được một tập các giá trị đo $\{(\tau_{j,m}, \eta_{j,m}), 1 \le j \le n\}$, trong đó,

$$\tau_{j,m} \;=\; f\,(mh, t_j) + \epsilon_{j,m}, \tag{3.6}$$

$$\eta_{j,m} \;=\; g\,(mh, t_j) + \varepsilon_{j,m}. \tag{3.7}$$

Trong thống kê, các sai số $\epsilon_{j,m}, \varepsilon_{j,m}$ chưa biết và thường được giả sử là độc lập với nhau. Ở đây, chúng tôi chỉ kiểm tra *mô hình phương sai bị chặn* , tức là có $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ và

$$\mathbb{V}ar(\epsilon_{j,m}) \le \sigma_1^2,\ \ \mathbb{V}ar(\varepsilon_{j,m}) \le \sigma_2^2. \tag{3.8}$$

3.2 Công thức nghiệm Fourier và tính không chỉnh của bài toán

3.2.1 Chuỗi Fourier và chuỗi Sinc

Trong phần này, chúng tôi sử dụng một số tính chất của cơ sở lượng giác được đưa ra bởi Tsybakov [5] và một số đánh giá cho chuỗi Fourier và chuỗi Sinc.

3.2.2 Biến đổi Fourier của nghiệm

Biến đổi Fourier ứng với hai biến x và t, ta có công thức nghiệm Fourier

$$\begin{aligned} v^{ft}(r,s) &= \frac{G(r,s)e^{-\lambda} - F(r,s)e^{-2\lambda}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} e^{\lambda y_0} + \frac{F(r,s)e^{2\lambda} - G(r,s)e^{\lambda}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} e^{-\lambda y_0} \\ &= F(r,s)C_\lambda(r,s) - G(r,s)D_\lambda(r,s), \end{aligned}$$

trong đó, $r, s \in \mathbb{R}, \lambda = A_0 + iB_0$, và

$$C_\lambda(r,s) = \frac{\sinh \lambda(2-y_0)}{\sinh \lambda}, \quad D_\lambda(r,s) = \frac{\sinh \lambda(1-y_0)}{\sinh \lambda}, \tag{3.9}$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 + \frac{s^2}{\kappa^2}} + r^2}{2}},\ B_0 = sgn(s)\sqrt{\frac{\sqrt{r^4 + \frac{s^2}{\kappa^2}} - r^2}{2}}. \tag{3.10}$$

Chúng ta có công thức nghiệm chính xác sau

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \tfrac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2} F(r,s)\tfrac{e^{\lambda(2-y_0)}-e^{-\lambda(2-y_0)}}{e^{\lambda}-e^{-\lambda}} e^{i(rx+st)}drds' \\ &\quad -\tfrac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2} G(r,s)\tfrac{e^{\lambda(1-y_0)}-e^{-\lambda(1-y_0)}}{e^{\lambda}-e^{-\lambda}} e^{i(rx+st)}drds'. \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2.3 Tính không chỉnh của bài toán

Như đã đề cập ở trên, công thức nghiệm của (3.1) - (3.5) có thể thu được dưới dạng sau

$$u_{1,3}^{ft}(r,y_0,s) = F(r,s)\frac{e^{\lambda(2-y_0)} - e^{-\lambda(2-y_0)}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} - G(r,s)\frac{e^{\lambda(1-y_0)} - e^{-\lambda(1-y_0)}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}.$$

Ta có

$$\left|\frac{e^{\lambda(2-y_0)} - e^{-\lambda(2-y_0)}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}\right|^2 \geq \frac{e^{2A_0(2-y_0)} + e^{-2A_0(2-y_0)} + 2}{e^{2A_0} + e^{-2A_0} - 2.}$$

Số hạng đầu tiên tăng theo cấp số nhân ,do đó, một nhiễu nhỏ đối với dữ liệu $f(x,t)$ sẽ được khuếch đại vô hạn bởi hệ số này. Vì vậy, bài toán khôi phục nhiệt độ $v(x,t)$ từ dữ liệu đo được là không chỉnh.

3.3 Một số kết quả chính

3.3.1 Các giả thiết

Ở phần trước, chúng ta đã chứng minh rằng bài toán là không chỉnh. Trước khi chỉnh hóa, chúng ta cần có một số giả thiết cho các hàm số $f,\ g$.

3.3.2 Các kết quả chính

Vì có rất nhiều tham số nên chúng tôi tìm cách chỉ định chúng.

Định lý 3.3.1. *Cho $Y > 2$, $0 < y < Y$, $q > 0$, $0 < \beta < 1/2$. Giả sử*

(i) $u(x,y,t)$ *được định nghĩa trên* $\mathbb{R}\times[0,Y]\times[0,\infty)$ *và thoả* (3.2),(3.5).

(ii) $(1+|x|+|t|)v_0, (1+|x|+|t|)v_y \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *trong đó* $v_y(x,t) := u(x,y,t)$ *khi* $t > 0$ *và* $v_y(x,t)$ *khi* $t \leq 0$.

Khi đó, chúng ta có thể tìm C, E, $C_\Lambda > 0$ sao cho $v_y \in V(q, C) \cap V_{trunc}(2, E) \cap C_{1,\beta,\Lambda}$ với $\Lambda^2 = C_\Lambda T^4/h^2$. Do đó, với u thoả (i) và (ii), chúng ta có thể chọn

$$\alpha = \beta' = 1, \rho = 2, \tau = 2, \text{ với } q, \beta \text{ bất kỳ }, q > 0, \beta \in (0, 1/2).$$

Chúng ta cũng có thể chọn

$$\begin{aligned}
C &\geq \iint_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} (1+r^2)^q |v_{y,1}^{ft}(r,t)|^2 drdt \\
&\qquad + \iint_{(\mathbb{R}\setminus[r_0,r_0])\times[0,\infty)} (1+r^2)^q \left| \frac{\partial v_{y,1}^{ft}}{\partial r}(r,t) \right|^2 drdt, \\
E &\geq \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial v_y^{ft}}{\partial s}(r,s) \right|^2 drds, \\
C_{Fou} &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|) \left\{ \|v_{y,t}(x,.)\|_{L^2(0,\infty)} + \|v_{y,tt}(x,.)\|_{L^2(0,\infty)} \right\}.
\end{aligned}$$

Chúng ta chia việc chỉnh hóa thành hai bước. Đầu tiên, chúng ta sẽ xây dựng hai ước lượng $\widehat{F}$ và $\widehat{G}$ cho F và G. Sau đó, chúng ta thay thế $(e^{\lambda(2-y_0)} - e^{-\lambda(2-y_0)})/(e^\lambda - e^{-\lambda})$ và $(e^{\lambda(1-y_0)} - e^{-\lambda(1-y_0)})/(e^\lambda - e^{-\lambda})$ trong (3.11) theo điều kiện ổn định.

Trong bước một, từ dữ liệu $\tau_{j,m}, \eta_{j,m}$ như trong (3.6) và (3.7), chúng ta sẽ xây dựng $\widetilde{f}$ và $\widetilde{g}$ lần lượt là các ước lượng cụ thể của các hàm f và g. Chúng ta chọn

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{N,M} = \widehat{f}_{N,M}^{ft}, \quad \widehat{G} = \widehat{G}_{N,M} = \widehat{g}_{N,M}^{ft}$$

với $\widehat{f}_{N,M}$ và $\widehat{g}_{N,M}$ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa: Giả sử mô hình (3.6) đúng. Chúng ta định nghĩa ước lượng cho các hệ số $c_p(mh)$ như sau:

$$\widehat{c}_{p,m} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \tau_{j,m} \phi_p(t_j) + \frac{1}{n} \tau_{n,m} \phi_p(t_n), \quad p = \overline{1,n}. \tag{3.12}$$

Chúng ta ước lượng hàm $f(x,t)$ trên $\mathbb{R}^2$ bởi

$$\widehat{f}_{N,M}(x,t) = \mathbb{I}_{[0,T]}(t) \sum_{m=-M}^{M} \sum_{p=1}^{N} \widehat{c}_{p,m} \phi_p(t) S(m,h)(x). \tag{3.13}$$

Định nghĩa: Giả sử mô hình (3.7) đúng. Chúng ta định nghĩa các ước lượng cho các hệ số $d_p(mh)$ như sau:

$$\widehat{d}_{p,m} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\eta_{j,m}\phi_p(t_j) + \frac{1}{n}\eta_{n,m}\phi_p(t_n), \quad p = \overline{1,n}. \tag{3.14}$$

Chúng ta ước lượng hàm $g(x,t)$ trên $\mathbb{R}^2$ bởi

$$\widehat{g}_{N,M}(x,t) = \mathbb{I}_{[0,T]}(t)\sum_{m=-M}^{M}\sum_{p=1}^{N}\widehat{d}_{p,m}\phi_p(t)S(m,h)(x). \tag{3.15}$$

Các số dương h, T và các số nguyên dương N, M được gọi là các tham số chỉnh hoá. Ta ký hiệu

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(h,T,M,N) \ &= \ A_\varepsilon\frac{T^{2\tau+1}}{N^{2\alpha}h^{2\beta'-1}} + B_\varepsilon\frac{T^{2\tau+1}}{h^{2\beta'-1}M^{2\beta}} \\ &\quad + C_\varepsilon\frac{MhTN}{n} + D_\varepsilon h^{4q-2} + \frac{E}{T^\rho},\end{aligned} \tag{3.16}$$

trong đó

$$A_\varepsilon = 2C_\Lambda\left(1 + \frac{\alpha 2^{-2\alpha+2}}{2\alpha-1}\right),\ B_\varepsilon = 2C_\Lambda,\ C_\varepsilon = 4\sigma^2,\ D_\varepsilon = 4C^2_{sinc,q}.$$

Trong bước hai, chúng ta phải thay thế các nhóm $(e^{\lambda(2-y_0)} - e^{-\lambda(2-y_0)})/(e^\lambda - e^{-\lambda})$ và $(e^{\lambda(1-y_0)} - e^{-\lambda(1-y_0)})/(e^\lambda - e^{-\lambda})$ theo điều kiện ổn định. Cho $\epsilon > 0$, chúng ta chọn $b_\epsilon = \ln(4/\epsilon)/(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1})$, suy ra $e^{2A_0} \le 4\epsilon^{-1}$ khi $(r,s) \in D_\epsilon$, trong đó $D_\epsilon = \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 : |r| \le b_\epsilon,\ |s| \le \kappa b_\epsilon^2.\}$ Tiếp theo, chúng ta sẽ tính gần đúng hàm v theo hàm $\widehat{v}_\epsilon(x,t)$

$$\begin{aligned}\widehat{v}_\epsilon(x,t) \ &= \tfrac{1}{4\pi^2}\iint_{D_\epsilon}\widehat{F}_{N,M}(r,s)\tfrac{e^{\lambda(2-y_0)}-e^{-\lambda(2-y_0)}}{e^\lambda-e^{-\lambda}}e^{i(rx+st)}drds \\ &\quad -\tfrac{1}{4\pi^2}\iint_{D_\epsilon}\widehat{G}_{N,M}(r,s)\tfrac{e^{\lambda(1-y_0)}-e^{-\lambda(1-y_0)}}{e^\lambda-e^{-\lambda}}e^{i(rx+st)}drds.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Sau đó, chúng ta có được các chặn trên cho hai phần chính trong biến đổi Fourier của nghiệm v và kết quả chính dẫn đến sự hội tụ của các ước lượng được trình bày trong hai định lý sau

Định lý 3.3.2. *Giả sử f, g thoả các giả thiết (A1)-(A3). Thì*

$$\max\left\{\mathbb{E}\|F - \widehat{F}_{N,M}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},\ \mathbb{E}\|G - \widehat{G}_{N,M}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right\} \le 4\pi^2\,\varepsilon_0(h,T,M,N).$$

Định lý 3.3.3. *Giả sử các giả thiết (A1)-(A3) đúng, $0 < \beta < \frac{2\beta'-1}{2}$ và $v \in H^\theta(\mathbb{R}^2), \theta \ge 0,$, thì chúng ta có*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\iint_{\mathbb{R}^2}|v_\epsilon - \widehat{v}|^2 drds \ &\le \tfrac{1}{4\pi^2\min\{1,\kappa^\theta\}b_\epsilon^{2\theta}}\iint_{\mathbb{R}^2\setminus D_\epsilon}(r^2+s^2)^\theta|v^{ft}(r,s)|^2drds \\ &\quad + 8\varepsilon_0(h,T,M,N)\left(\frac{4}{\epsilon}\right)^{3-y_0}.\end{aligned}$$

Để đạt được sự hội tụ của các hàm ước lượng, có nhiều cách để xác định các tham số chỉnh hóa h, T, M, N. Với phần lý thuyết này, chúng ta sẽ đưa ra một ví dụ về lựa chọn tham số chỉnh hoá. Ta đặt

$$\mu = \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} + 1 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{2\tau+1}{2\alpha} + \frac{2\tau+1}{2\beta} + 1\right) + \frac{1}{4q-2}\left(\frac{2\beta'-1}{2\alpha} + \frac{2\beta'-1}{2\beta} - 1\right)\right)^{-1},$$

và

$p_1 = 2\alpha\mu^{-1}$, $p_2 = 2\beta\mu^{-1}$, $p_3 = \mu^{-1}$,

$$p_4 = (4q-2)\mu^{-1}\left(\frac{2\beta'-1}{2\alpha} + \frac{2\beta'-1}{2\beta} - 1\right)^{-1}, \; p_5 = \rho\mu^{-1}\left(\frac{2\tau+1}{2\alpha} + \frac{2\tau+1}{2\beta} + 1\right)^{-1}.$$

Định lý 3.3.4. *Giả sử các giả thiết (A1)-(A3) đúng. Đặt*

$$(h_n, T_n, M_n, N_n) = \operatorname{argmin} \varepsilon_0(h, T, M, N) \quad \textit{trong đó } h, T, M, N > 0.$$

Khi đó

$$\varepsilon_0(h_n, T_n, M_n, N_n) = (p_1 A_\varepsilon)^{\frac{1}{p_1}} (p_2 B_\varepsilon)^{\frac{1}{p_2}} (p_3 C_\varepsilon)^{\frac{1}{p_3}} (p_4 D_\varepsilon)^{\frac{1}{p_4}} (p_5 E)^{\frac{1}{p_5}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}$$

trong đó $A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon, E$ và p_i, $i = \overline{1,5}$, được định nghĩa ở trên. Hơn nữa, chúng ta có

$$\begin{aligned}
T_n &= \left(\frac{p_5 E}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}} h_n^{-\frac{4q-2}{\rho}},\\
N_n &= \left(\frac{p_1 A_\varepsilon}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \left(\frac{p_5 E}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{2\tau+1}{2\alpha\rho}} h_n^{-\frac{(2\beta'-1)\rho + (4q-2)(\rho+2\tau+1)}{2\alpha\rho}},\\
M_n &= \left(\frac{p_2 B_\varepsilon}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\beta}} \left(\frac{p_5 E}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{2\tau+1}{2\beta\rho}} h_n^{-\frac{(2\beta'-1)\rho + (4q-2)(\rho+2\tau+1)}{2\beta\rho}},
\end{aligned}$$

và

$$h_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\vartheta}}} \left(\frac{p_3 C_\varepsilon}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{p_5 E}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho\vartheta} + \frac{2\tau+1}{2\alpha\rho\vartheta} + \frac{2\tau+1}{2\beta\rho\vartheta}} \left(\frac{p_1 A_\varepsilon}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\alpha\vartheta}} \left(\frac{p_2 B_\varepsilon}{p_4 D_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\beta\vartheta}},$$

trong đó $\vartheta = 4q - 3 + \frac{4q-2}{\rho} + \frac{(2\beta'-1)\rho + (4q-2)(\rho+2\tau+1)}{2\rho}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$.

Hơn nữa, giả sử rằng, có $\theta, K_{v,\theta} > 0$ thoả $v \in H^\theta(\mathbb{R}^2)$ và $\|v\|_{H^\theta} \le K_{v,\theta}$. Cho

$$\epsilon_n = argmin_{0<\epsilon<1}\left\{32\pi^2 \varepsilon_0(h_n, T_n, M_n, N_n)\left(\frac{4}{\epsilon}\right)^{3-y_0} + \frac{K_{v,\theta}^2}{\max\{1, \kappa^\theta\} b_\epsilon^{2\theta}}\right\}.$$

Sau đó, bằng cách ký hiệu $\widehat{v_n} = \widehat{v}_{\epsilon_n}$ chúng ta có thể tìm thấy một hằng số $C' > 0$ độc lập với n sao cho

$$\mathbb{E}\,\|v - \widehat{v}_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \le \frac{C'}{\ln^{2\theta}(n)}.$$

3.3.3 Các kết quả giải số

Trong phần này, thuật toán giải bài toán (3.1)-(3.7) được trình bày theo các bước sau

- **Bước 1:** Cho $n \in \mathbb{N}$, chọn các tham số h_n, T_n, M_n, N_n, ϵ_n.
  Đặt $b_n = \log(4/\epsilon_n) / \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$, $a_n = b_n^2$.
- **Bước 2:** Tính $\widehat{f}_{N_n,M_n}(x,t)$ và $\widehat{g}_{N_n,M_n}(x,t)$ như trong (3.13) và (3.15).
- **Bước 3:** Tính toán $\widehat{v}_n = \widehat{v}_{\epsilon_n}$ như trong (3.17).

3.3.4 Mô phỏng và nhận xét

Trong phần này cung cấp hai ví dụ giải số. Chúng ta xấp xỉ $v_n = v_{\epsilon_n}$ như trong các Bước 1-3. Chúng ta có thể thấy sự hội tụ của v_n đến $u(y_0)$ ổn định. Điều này xác nhận tính đáng tin cậy của phương pháp được đề xuất.

Chương 4

Kết luận

Trong luận án, chúng tôi đã nghiên cứu về bài toán sideways với dữ liệu đo đạc bị nhiễu trên miền một chiều và miền hai chiều. Kết quả chính của luận án được tóm tắt như sau:

Đối với bài toán 1: Tức là bài toán sideways với dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên và nhiễu tất định trên miền một chiều. Chúng tôi đã chỉ ra bài toán là không chỉnh. Sau đó, với dữ liệu tất định, chúng tôi sử dụng phương pháp chỉnh hóa chặt cụt hậu nghiệm để chỉnh hoá bài toán. Đồng thời, chúng tôi cũng xem xét bậc tối ưu cho chỉnh hóa hậu nghiệm của bài toán. Trường hợp nhiễu ngẫu nhiên trên miền một chiều, chúng tôi thiết kế các điểm lưới để đo dữ liệu và T được chọn phù hợp với kích thước mẫu n sao cho phương pháp chỉnh hoá hội tụ trên miền không bị chặn. Sau cùng là các tính toán số nhằm minh họa cho kết quả lý thuyết trước đó.

Đối với bài toán 2: Là bài toán sideways trên miền hai chiều với dữ liệu ngẫu nhiên rời rạc. Chúng tôi tập trung vào bài toán khôi phục sự phân bố nhiệt độ từ dữ liệu đo có nhiễu ngẫu nhiên. Hơn nữa, chúng tôi quan tâm đến dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên có tính mới so với các bài báo trước đó. Sau cùng là các ví dụ trong không gian hai chiều và các tính toán số nhằm minh họa kết quả lý thuyết.

Trên cơ sở những kết quả thu được trong luận án, chúng tôi sẽ hướng tới nghiên cứu một số vấn đề sau:

(i) Chỉnh hóa bài toán sideways phi tuyến cho cả hai trường hợp dữ liệu tất định và ngẫu nhiên (trường hợp dữ liệu rời rạc và dữ liệu liên tục có nhiễu trắng).

(ii) Chỉnh hóa bài toán sideways cho các phương trình vi phân chứa các loại đạo hàm phân thứ khác.

Danh mục công trình khoa học của tác giả

[P1] Dang Duc Trong, Nguyen Thi Hong Nhung, Nguyen Dang Minh & Nguyen Nhu Lan, (2024), Corrigendum to A fractional sideways problem in a one-dimensional finite-slab with deterministic and random interior perturbed data, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pp. 1-26.
DOI: http://doi.org/10.1002/mma.10039

[P2] Dang Duc Trong, Tran Quoc Viet, Vo Dang Khoa & Nguyen Thi Hong Nhung, (2021), A two-dimensional sideways problem with random discrete data, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 86, pp.16-32.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.01.013

Tài liệu tham khảo

[1] Ming Li, Xiang-Xiang Xi, and Xiang-Tuan Xiong. Regularization for a fractional sideways heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255:28–43, 2014.

[2] U. Tautenhahn. Optimal stable approximations for the sideways heat equation. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 5(3):287–307, 1997.

[3] P. N. Dinh Alain, P. H. Quan, and D. D. Trong. Sinc approximation of the heat distribution on the boundary of a two-dimensional finite slab. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 9(3):1103–1111, 2008.

[4] J. V. Beck, B. Blackwell, and C. R. S. Clair. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1985.

[5] A. B. Tsybakov. *Introduction to Nonparametric Estimation*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2009.